GRAF BERARAH FUZZY*(FUZZY DIGRAF)*

Dianita Anggraeni[1], Budi Rahadjeng[2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
[2] Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya, 60231
Email: dianitaanggraeni8@gmail.com[1], rahajeng13@yahoo.com[2]

ABSTRAK

Himpunan fuzzy *(fuzzy set)* merupakan pengembangan dari himpunan tegas *(crisp set)*. Jika pada himpunan tegas keanggotaannya ditentukan secara tegas apakah termasuk anggota dan bukan anggota, namun pada himpunan fuzzy memiliki derajat keanggotaan yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1].

Dalam kajian ini, penulis akan mengkaji tentang penggabungan konsep himpunan fuzzy dengan graf berarah *(digraf)*. Penulis akan mendeskripsikan tentang graf, digraf, sifat-sifat aljabar pada himpunan fuzzy, relasi fuzzy, komposisi dari relasi fuzzy. Setelah itu penulis mendefinisikan graf berarah fuzzy *(fuzzy digraf)* dan komposisi dari graf berarah fuzzy *(fuzzy digraf)* kemudian mendiskusikan beberapa sifat aljabar pada graf berarah fuzzy *(fuzzy digraf)* dan membuktikan bahwa komposisi dari graf berarah fuzzy *(fuzzy digraf)* bersifat assosiatif dan distributif. Penulis juga mendefinisikan graf berarah fuzzy yang lebih baik dan membuktikan bahwa graf berarah terinduksi dari komposisi dua graf berarah fuzzy yang lebih baik sama dengan komposisi dari dua graf berarah terinduksi dari masing-masing graf berarah fuzzy yang lebih baik tersebut.

Kata Kunci: graf berarah, himpunan fuzzy, graf berarah fuzzy, komposisi dari graf berarah fuzzy, graf berarah terinduksi, graf berarah fuzzy yang lebih baik.

PENDAHULUAN

Dalam konsep himpunan dikenal dua himpunan yang sering digunakan yaitu himpunan tegas *(crips)* dan himpunan kabur *(fuzzy)*. Himpunan tegas *(crips)* adalah suatu himpunan yang secara tegas membedakan anggota-anggotanya apakah termasuk dalam himpunan atau tidak, yang biasanya disimbolkan dengan 0 dan 1, sedangkan himpunan kabur *(fuzzy)* adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya memiliki derajat kanggotaan.

Himpunan fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi Asker Zadeh seorang guru besar di University of California, Amerika Serikat . Lotfi Asker Zadehmendefinisikan suatu himpunan fuzzy$A$ dalam semesta pembicaraan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dengan fungsi keanggotaan μ: $X \rightarrow [0,1]$, yang mana $\mu(x)$ mempresentasikan derajat keanggotaan x_i, i=1,2,…,n. Dengan kata lain, suatu himpunan fuzzy$A$ dapat didefinisikan secara umum sebagai himpunan pasangan berurutan $\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}\,(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}\,(x_2)), \dots, (x_n, \mu_{\tilde{A}}\,(x_n))\}$.

Teori graf adalah salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikannya dan banyak sekali penerapannya dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang keilmuan. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*.

Sebuah graf *G* berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong *V(G)* dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) *E(G)* yang elemen-elemenya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen *e* dalam *E(G)* merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik *V(G)*. *V(G)* disebut himpunan titik *G* dan *E(G)* disebut himpunan sisi *G*. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis: 1. Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. 2. Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

Teori graf juga digunakan untuk memecahkan masalah dalam sebuah industri yaitu dalam masalah jaringan. Dalam hal ini digunakan sebuah graf berarah *(digraf)* dan juga menggunakan pelabelan titik dan sisi berarah, disini tidak akan cukup jika menggunakan dua nilai yaitu 0 dan 1. Sehingga dibutuhkan teori yang lebih fleksibel seperti konsep fuzzy yang memberikan nilai fungsi keanggotaan yang berada dalam suatu interval [0,1]. Dalam skripsi ini akan dibahas suatu penggabungan konsep digrafdengan konsep himpunan fuzzy, yaitu operasi, sifat-sifat aljabar pada graf berarah fuzzy, komposisi dari graf berarah fuzzy dan sifat-sifatnya, dan graf berarah fuzzy yang lebih baik. Sehingga skripsi ini diberi judul *"GRAF BERARAH FUZZY (FUZZY DIGRAF)"*.

Kajian Teori

2.1 Teori Graf

Definisi 2.1 Sebuah graf *G* berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong *V(G)* dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) *E(G)* yang elemen-elemenya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen *e* dalam *E(G)* merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik *V(G)*. *V(G)* disebut himpunan titik *G* dan *E(G)* disebut himpunan sisi *G* (Budayasa, 2007:1).

Definisi 2.2 Sebuah graf berarah *D*adalah suatu pasangan terurut dua himpunan $(V(D), \Gamma(D))$, dimana $V(D)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan $\Gamma(D)$adalah himpunan berhingga (mungkin kosong) yang anggota-anggotanya disebut sisi berarahsedemikian hinggasetiap sisi berarah merupakan pasangan berurutan dari dua titik di *V(D)*(Budayasa, 2007:214).

Definisi 2.3 Dua atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik *u* dan *v* pada suatu graf berarah disebut sisi berarah gand*a*, dan suatu titik yang menghubungkan ke dirinya sendiri disebut sisi loop (Chartrand dan lesniak, 1996:30).

Definisi 2.4 Sebuah graf berarah $D_l$adalah subgraf berarahdari sebuah graf berarah *D* jika$V(D_1) \subseteq V(D)$dan $\Gamma(D_1) \subseteq \Gamma(D)$(Chartrand dan lesniak, 1996:26).

Definisi 2.5 Gabungan dua graf berarah$G_1 = (V(G_1), \Gamma(G_1))$ dan $G_2 = (V(G_2), \Gamma(G_2))$ adalah suatu graf *G*, ditulis $G = G_1 \cup G_2$dengan himpunan titiknya $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$dan himpunan sisi berarahnya$\Gamma(G) = \Gamma(G_1) \cup \Gamma(G_2)$.

Definisi 2.6 Irisan dua graf berarah$G_1 = (V(G_1), \Gamma(G_1))$ dan$G_2 = (V(G_2), \Gamma(G_2))$ adalah suatu graf *G*, ditulis $G = G_1 \cap G_2$dengan himpunan titiknya $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$dan himpunan sisi berarahnya $\Gamma(G) = \Gamma(G_1) \cap \Gamma(G_2)$.

2.2 Himpunan Fuzzy

Definisi 2.7 Jika *X* adalah himpunan tak kosong dan anggotanya dinyatakan dengan x maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$di *X* adalah himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

dengan $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$ adalah fungsi keanggotaan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam semesta *X*.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$.

(Chen dan Wu,1986:440)

Definisi 2.8 Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy pada semesta *X*.$\tilde{A}$ dikatakan sama dengan $\tilde{B}$ jika $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \forall x \in X$

(Chen dan Wu,1986:440)

Definisi 2.9 Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy pada semesta *X*.$\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jika

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \forall x \in X$$

(Chen dan Wu,1986:440)

2.3Operasi pada Himpunan Fuzzy

Definisi 2.10 Misalkan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada himpunan semesta *X* dengan derajat keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$ maka gabungan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan pasangan berurutan

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$

dengan $\mu_{\tilde{A} \vee \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$

(Chen dan Wu,1986:440)

Definisi 2.11 Misalkan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada himpunan semesta *X* dengan derajat keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$ maka irisan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$adalah himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$

dengan $\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$

(Chen dan Wu,1986:440)

Definisi 2.12 Misalkan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada himpunan semesta *X* dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ maka komplemen dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ adalah himpunan pasangan terurut

$$\left(\tilde{A}\right)^{c} = \left\{\left(x, \mu_{(\tilde{A})^{c}}(x)\right) | x \in X\right\}$$

dengan $\mu_{(\tilde{A})^{c}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$

(Chen dan Wu,1986:440)

Definisi 2.13 Misalkan diberikan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada himpunan semesta X dengan derajat keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$ maka hasil kali aljabar dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} \bullet \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A} \bullet \tilde{B}}(x)\right) | x \in X\right\}$$

dengan $\mu_{\tilde{A} \bullet \tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \bullet \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \forall x \in X$

operasi $\bullet$ adalah operasi perkalian dari $\mu_{\tilde{A}}(x)$dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$

(Chen dan Wu, 1986:440)

Definisi 2.14 Misalkan diberikan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada himpunan semesta X dengan derajat keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$ maka jumlah aljabar dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x)\right) | x \in X\right\}$$

Dengan$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \bullet \mu_{\tilde{B}}(x) \quad , \forall x \in X$

(Chen dan Wu, 1986:440)

Definisi 2.15 Misalkan*A* dan *B* adalah dua himpunan tak kosong, hasil kali cartesius $A \times B$ didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan berurutan *(a,b)* dengan $a \in A$ dan $b \in B$, jadi

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

2.4Sifat-Sifat Himpunan Fuzzy

Definisi 2.16 Misal $\tilde{A}, \tilde{B}$, $\tilde{C}$adalah tiga himpunan fuzzy, maka sifat-sifat himpunan fuzzy sebagai berikut:

1. Komutatif : $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{B} \vee \tilde{A}$
   $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{B} \wedge \tilde{A}$
2. Asosiatif : $\tilde{A} \vee \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) \vee \tilde{C}$
   $\tilde{A} \wedge \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right) \wedge \tilde{C}$
3. Idempoten : $\tilde{A} \vee \tilde{A} = \tilde{A}$
   $\tilde{A} \wedge \tilde{A} = \tilde{A}$
4. Distributif :$\tilde{A} \vee \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) \wedge \left(\tilde{A} \vee \tilde{C}\right)$
   $\tilde{A} \wedge \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right) \vee \left(\tilde{A} \wedge \tilde{C}\right)$
5. Identitas :$\tilde{A} \vee \emptyset = \tilde{A}$
   $\tilde{A} \wedge \emptyset = \emptyset$
   $\tilde{A} \vee X = X$
   $\tilde{A} \wedge X = \tilde{A}$
6. Transitif :$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \subseteq \tilde{C} = \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$

Teorema 2.2 Misalkan$\tilde{A}, \tilde{B}$ adalah dua himpunan fuzzy pada *X*, maka diperoleh:

1. $\tilde{A} \bullet \tilde{B} = \tilde{B} \bullet \tilde{A}$
2. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A}$
3. $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^{c} = \left(\tilde{A}\right)^{c} \wedge \left(\tilde{B}\right)^{c}$
4. $\left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^{c} = \left(\tilde{A}\right)^{c} \vee \left(\tilde{B}\right)^{c}$
5. $\left(\tilde{A} \bullet \tilde{B}\right)^{c} = \left(\tilde{A}\right)^{c} \oplus \left(\tilde{B}\right)^{c}$
6. $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^{c} = \left(\tilde{A}\right)^{c} \bullet \left(\tilde{B}\right)^{c}$
7. $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^{c} \leq \left(\tilde{A}\right)^{c} \oplus \left(\tilde{B}\right)^{c}$
8. $\left(\tilde{A}\right)^{c} \bullet \left(\tilde{B}\right)^{c} \leq \left(\tilde{A} \bullet \tilde{B}\right)^{c}$
9. $\tilde{A} \wedge \left(\tilde{A} \vee \tilde{C}\right) = \tilde{A}$
10. $\tilde{A} \vee \left(\tilde{A} \wedge \tilde{C}\right) = \tilde{A}$
11. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \bullet \tilde{B}$

(Chen dan Wu, 1986:440)

Teorema 2.3 Misalkan$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ adalah tiga himpunan fuzzy pada *X*, maka diperoleh:

1. $\tilde{A} \bullet \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \bullet \tilde{B}\right) \vee \left(\tilde{A} \bullet \tilde{C}\right)$
2. $\tilde{A} \bullet \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \bullet \tilde{B}\right) \wedge \left(\tilde{A} \bullet \tilde{C}\right)$
3. $\tilde{A} \oplus \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right) \wedge \left(\tilde{A} \oplus \tilde{C}\right)$
4. $\tilde{A} \oplus \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right) \vee \left(\tilde{A} \oplus \tilde{C}\right)$
5. $\tilde{A} \bullet \left(\tilde{B} \oplus \tilde{C}\right) \leq \left(\tilde{A} \bullet \tilde{B}\right) \oplus \left(\tilde{A} \bullet \tilde{C}\right)$

(Chen dan Wu, 1986:442)

Teorema 2.4 Misalkan$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ adalah tiga himpunan fuzzy pada *X*. Maka diperoleh:

1. Jika $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ dan $\tilde{A} \leq \tilde{C}$ maka
   a. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \vee \tilde{C}$
   b. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \wedge \tilde{C}$
   c. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \oplus \tilde{C}$
2. Jika $\tilde{A} \leq \tilde{C}$ dan $\tilde{B} \leq \tilde{C}$ maka $\left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right) \leq \tilde{C}$

(Chen dan Wu, 1986:443)

2.5 Relasi Fuzzy

Definisi 2.17 Relasi fuzzy $\tilde{R}$antara elemen-elemen pada himpunan X dan elemen-elemen pada himpunan Y didefinisikan sebagai himpunan bagian fuzzy dari hasil kali cartesius $X \times Y$ yaitu

$$\tilde{R} = \left\{\left((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)\right) | (x, y) \in X \times Y\right\}$$

dengan : $\mu_{\tilde{R}} : X \, x \, Y \longrightarrow [0,1]$

$\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ adalah derajat keanggotaan unsur $(x, y) \in X \times Y$dalam relasi fuzzy $\tilde{A}$.

(Chen dan Wu, 1986:443)

Definisi 2.18 Misalkan$\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X , $\tilde{R}$ adalah relasi fuzzy pada X , $\tilde{R}$ dikatakan relasi fuzzy pada $\tilde{A}$

jika$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y) \forall x, y \in X$

(Chen dan Wu, 1986:443)

2.6 Komposisi Relasi Fuzzy

Definisi 2.19 Misalkan $\tilde{R}$ dan $\tilde{F}$ adalah dua relasi fuzzy pada *X*. Komposisi dua relasi fuzzy $\tilde{R}$ dan $\tilde{F}$ adalah

1. Komposisi Tipe I
$$\tilde{R} \circ \tilde{F} = \left\{\left((x,z), \mu_{\tilde{R}\circ\tilde{F}}(\mathrm{x,z})\right) \mid (x,z) \in X\right\}$$
dengan
$$\mu_{\tilde{R}\circ\tilde{F}}(\mathrm{x,z}) = \max_{y\in X}\{min\{\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{F}}(y,z)\}\}$$
2. Komposisi Tipe II
$$\tilde{R} \odot \tilde{F} = \left\{\left((x,z), \mu_{\tilde{R}\odot\tilde{F}}(\mathrm{x,z})\right) \mid (x,z) \in X\right\}$$
dengan
$$\mu_{\tilde{R}\odot\tilde{F}}(\mathrm{x,z}) = \min_{y\in X}\{max\{\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{F}}(y,z)\}\}$$

(Kao dan Wu:605)

Teorema 2.6 Misal $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ adalah tiga relasi fuzzy pada *X* maka komposisi tipe I dan II pada relasi fuzzy bersifat assosiatif.

1. $\tilde{F}_1 \circ (\tilde{F}_2 \circ \tilde{F}_3) = (\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2) \circ \tilde{F}_3$.
2. $\tilde{F}_1 \odot (\tilde{F}_2 \odot \tilde{F}_3) = (\tilde{F}_1 \odot \tilde{F}_2) \odot \tilde{F}_3$

(Kao dan Wu:606)

Teorema 2.7 Misal $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ adalah tiga relasi fuzzy pada *X* maka komposisi tipe I dan II pada relasi fuzzy bersifat distributif dengan operasi maksimum ($\vee$) dan minimum ($\wedge$).

1. $\tilde{F}_1 \circ (\tilde{F}_2 \vee \tilde{F}_3) = (\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2) \vee (\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_3)$
2. $\tilde{F}_1 \circ (\tilde{F}_2 \wedge \tilde{F}_3) \le (\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2) \wedge (\tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_3)$
3. $\tilde{F}_1 \odot (\tilde{F}_2 \vee \tilde{F}_3) \ge (\tilde{F}_1 \odot \tilde{F}_2) \vee (\tilde{F}_1 \odot \tilde{F}_3)$
4. $\tilde{F}_1 \odot (\tilde{F}_2 \wedge \tilde{F}_3) = (\tilde{F}_1 \odot \tilde{F}_2) \wedge (\tilde{F}_1 \odot \tilde{F}_3)$

(Kao dan Wu:608)

PEMBAHASAN

3.1 Graf Berarah Fuzzy

Definisi 3.1 Misalkan *X* adalah himpunan berhingga, $\tilde{A}$= $\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$ adalah himpunan fuzzy pada *X*, dan $\tilde{F} = \left\{\left((x,y), \mu_{\tilde{F}}(x,y)\right) \mid (x,y) \in XxY\right.$ adalah sebuah relasi fuzzy pada *X*. Pasangan terurut $(\tilde{A}, \tilde{F})$ disebut graf berarah fuzzy *(fuzzy digraf)* pada *X* (Chen dan Wu, 1986:446).

Definisi 3.2 Misalkan $(\tilde{A}, \tilde{F})$ dan $(\tilde{B}, \tilde{E})$ adalah dua graf berarah fuzzy pada *X*. Maka $(\tilde{B}, \tilde{E})$ disebut *subgraf berarah fuzzy* pada $(\tilde{A}, \tilde{F})$ jika
$$\mu_{\tilde{B}}(x) \le \mu_{\tilde{A}}(x) \quad , \quad \text{untuk } \forall x \in X$$
$$\mu_{\tilde{E}}(x,y) \le \mu_{\tilde{F}}(x,y) \quad , \quad \text{untuk } \forall x,y \in X$$
Sehingga dapat ditulis sebagai berikut
$$(\tilde{B}, \tilde{E}) \le (\tilde{A}, \tilde{F})$$
(Chen dan Wu 1986:446)

3.2 Operasi pada Graf Berarah Fuzzy

Definisi 3.3 Misalkan $\tilde{P} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{E})$ adalah dua graf berarah fuzzy pada *X*, maka terdapat beberapa operasi yaitu

1) Maksimum $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$ dinotasikan dengan $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$, yang artinya
$$\tilde{P} \vee \tilde{Q} = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{F} \vee \tilde{E})$$
2) Minimum $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$ dinotasikan dengan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$, yang artinya
$$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = (\tilde{A} \wedge \tilde{B}, \tilde{F} \wedge \tilde{E})$$
3) Komplemen $\tilde{P}$ dinotasikan dengan $(\tilde{P})^c$, yang artinya
$$(\tilde{P})^C = \left((\tilde{A})^C, (\tilde{F})^C\right)$$
4) Hasil Kali Aljabar $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$ dinotasikan dengan $\tilde{P} \bullet \tilde{Q}$, yang artinya
$$\tilde{P} \bullet \tilde{Q} = (\tilde{A} \bullet \tilde{B}, \tilde{F} \bullet \tilde{E})$$
5) Jumlah aljabar $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$ dinotasikan dengan $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$, yang artinya
$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = (\tilde{A} \oplus \tilde{B}, \tilde{F} \oplus \tilde{E})$$

(Chen dan Wu, 1986:447)

Teorema 3.1 Misalkan $\tilde{P} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{E})$ adalah dua graf berarah fuzzy pada *X*, maka diperoleh :

1. $\tilde{P} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$
2. $\tilde{Q} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$
3. $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \le \tilde{P}$
4. $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \le \tilde{Q}$
5. $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \ge \tilde{P} \vee \tilde{Q} \ge \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$
6. $(\tilde{P} \vee \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^c \wedge (\tilde{Q})^c$
7. $(\tilde{P} \wedge \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^c \vee (\tilde{Q})^c$
8. $(\tilde{P} \bullet \tilde{Q})^C \ge (\tilde{P})^c \bullet (\tilde{Q})^c$
9. $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C \le (\tilde{P})^c \oplus (\tilde{Q})^c$
10. $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^c \bullet (\tilde{Q})^c$
11. $(\tilde{P} \bullet \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^c \oplus (\tilde{Q})^c$
12. $\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) = \tilde{P}$
13. $\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \tilde{P}$

(Chen dan Wu, 1986:447)

Bukti :

1. Diketahui $\tilde{P} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{E})$
Akan dibuktikan $\tilde{P} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$
Berdasarkan definisi 3.2, untuk membuktikan $\tilde{P} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ maka akan di tunjukkan bahwa
(i) $\mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$
(ii) $\mu_{\tilde{F}}(x,y) \le \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$, untuk $\forall x,y \in X$

(i) Ambil sebarang $x \in X$

Berdasarkan sifat trikotomi maka ada 3 kasus tentang $\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{B}}(x)$

a. $\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ = maks $\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}=\mu_{\tilde{B}}(x)$

Sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$

Jadi $\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ (1)

b. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ = maks $\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}=\mu_{\tilde{A}}(x)$

jadi $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ (2)

c. $\mu_{\tilde{A}}(x) > \mu_{\tilde{B}}(x)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ = maks $\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}=\mu_{\tilde{A}}(x)$

jadi $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(x)$ (3)

dari (1), (2), (3) diperoleh

$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}$, untuk $\forall x \in X$

(ii) Ambil sebarang $x, y \in X$

Berdasarkan sifat trikotomi maka ada 3 kasus tentang $\mu_{\tilde{F}}(x,y)$ dan $\mu_{\tilde{E}}(x,y)$

a. $\mu_{\tilde{F}}(x,y) < \mu_{\tilde{E}}(x,y)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ = maks $\{\mu_{\tilde{F}}(x,y), \mu_{\tilde{E}}(x,y)\}=\mu_{\tilde{E}}(x)$

Sehingga $\mu_{\tilde{F}}(x,y) < \mu_{\tilde{E}}(x,y) = \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$

Jadi $\mu_{\tilde{F}}(x,y) < \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ (1)

b. $\mu_{\tilde{F}}(x,y) = \mu_{\tilde{E}}(x,y)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ = maks $\{\mu_{\tilde{F}}(x,y), \mu_{\tilde{E}}(x,y)\}=\mu_{\tilde{F}}(x)$

jadi $\mu_{\tilde{F}}(x,y) = \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ (2)

c. $\mu_{\tilde{F}}(x,y) > \mu_{\tilde{E}}(x,y)$

maka didapat

$\mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ = maks $\{\mu_{\tilde{F}}(x,y), \mu_{\tilde{E}}(x,y)\}=\mu_{\tilde{F}}(x)$

jadi $\mu_{\tilde{F}}(x,y) = \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$ (3)

dari (1), (2), (3) diperoleh

$\mu_{\tilde{F}}(x,y) \leq \mu_{\tilde{F}\vee\tilde{E}}(x,y)$, untuk $\forall x, y \in X$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\tilde{P} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$. ■

(2), (3) dan (4) dengan cara yang sama

5. Diketahui $\tilde{P} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{E})$

Akan dibuktikan $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Untuk membuktikan pertidaksamaan tersebut, maka akan di buktikan 2 kasus yaitu:

i. $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$

ii. $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Bukti :

i. $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = (\tilde{A}, \tilde{F}) \oplus (\tilde{B}, \tilde{E})$

$= (\tilde{A} \oplus \tilde{B}, \tilde{F} \oplus \tilde{E})$

berdasarkan teorema 2.2 (11) maka diperoleh

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B}, \tilde{F} \oplus \tilde{E}) \geq (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \quad \tilde{F} \vee \tilde{E})$$
$$= \tilde{P} \vee \tilde{Q}$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$

ii. $\tilde{P} \vee \tilde{Q} = (\tilde{A}, \tilde{F}) \vee (\tilde{B}, \tilde{E})$

$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \quad \tilde{F} \vee \tilde{E})$

berdasarkan teorema 2.2(11) maka diperoleh

$$(\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{F} \vee \tilde{E}) \geq (\tilde{A} \wedge \tilde{B}, \tilde{F} \wedge \tilde{E})$$
$$= \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka

$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$. ■

6. $(\tilde{P} \vee \tilde{Q})^C = \left((\tilde{A}, \tilde{F}) \vee (\tilde{B}, \tilde{E})\right)^C$

$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{F} \vee \tilde{E})^C$

$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B})^c, (\tilde{F} \vee \tilde{E})^c\right)$

berdasarkan teorema 2.2 (3) maka diperoleh

$$\left((\tilde{A} \vee \tilde{B})^c, (\tilde{F} \vee \tilde{E})^c\right) = \left((\tilde{A}^c \wedge \tilde{B}^c), (\tilde{F}^c \wedge \tilde{E}^c)\right)$$
$$= \left((\tilde{A}^c, \tilde{F}^c) \wedge (\tilde{B}^c, \tilde{E}^c)\right)$$
$$= \left((\tilde{A}, \tilde{F})^c \wedge (\tilde{B}, \tilde{E})^c\right)$$
$$= (\tilde{P})^c \wedge (\tilde{Q})^c$$

Jadi, $(\tilde{P} \vee \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^c \wedge (\tilde{Q})^c$. ■

(7), (8), (9), (10), (11) dengan cara yang sama

12. $\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) = (\tilde{A}, \tilde{F}) \wedge \left((\tilde{A}, \tilde{F}) \vee (\tilde{B}, \tilde{E})\right)$

$= (\tilde{A}, \tilde{F}) \wedge \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}), (\tilde{F} \vee \tilde{E})\right)$

$= \left(\left(\tilde{A} \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{B})\right), \left(\tilde{F} \wedge (\tilde{F} \vee \tilde{E})\right)\right)$

(berdasarkan teorema 2.2(9))

$= (\tilde{A}, \tilde{F}) = \tilde{P}$

Jadi, $\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) = \tilde{P}$. ■

(13) dengan cara yang sama

Teorema 3.2 Misalkan $\tilde{P}, \tilde{Q}$, dan $\tilde{R}$ adalah tiga graf berarah fuzzy pada *X*, maka diperoleh :

1. $\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{R}) = (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{R})$
2. $\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \vee \tilde{R}) = (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{R})$
3. $\tilde{P} \bullet (\tilde{Q} \oplus \tilde{R}) \leq (\tilde{P} \bullet \tilde{Q}) \oplus (\tilde{P} \bullet \tilde{R})$

(Chen dan Wu, 1986:448)

Bukti:

1. Diketahui $\tilde{P} = (\tilde{A}, \tilde{F})$, $\tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{E})$ dan $\tilde{R} = (\tilde{C}, \tilde{D})$. Akandibuktikan $\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{R}) = (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{R})$

$$\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{R}) = (\tilde{A},\tilde{F}) \vee \left((\tilde{B},\tilde{E}) \wedge (\tilde{C},\tilde{D})\right)$$
$$= (\tilde{A},\tilde{F}) \vee \left((\tilde{B} \wedge \tilde{C}),(\tilde{E} \wedge \tilde{D})\right)$$
$$= \left(\left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C})\right),\left(\tilde{F} \vee (\tilde{E} \wedge \tilde{D})\right)\right)$$

berdasarkan definisi 2.13 yaitu sifat distributif pada himpunan fuzzy, maka diperoleh

$$= \left(\left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C})\right),\left((\tilde{F} \vee \tilde{E}) \wedge (\tilde{F} \vee \tilde{D})\right)\right)$$
$$= \left(\left((\tilde{A} \vee \tilde{B}),(\tilde{F} \vee \tilde{E})\right) \wedge \left((\tilde{A} \vee \tilde{C}),(\tilde{F} \vee \tilde{D})\right)\right)$$
$$= \left(\left((\tilde{A},\tilde{F}) \vee (\tilde{B},\tilde{E})\right) \wedge \left((\tilde{A},\tilde{F}) \vee (\tilde{C},\tilde{D})\right)\right)$$
$$= (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{R})$$

Jadi, $\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{R}) = (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{R})$. ■

(2) dan (3) dengan cara yang sama

3.3 Komposisi Graf Berarah Fuzzy

Definisi 3.7 Misalkan*X* adalah himpunan berhingga dan $(\tilde{A},\tilde{F})$ dan $(\tilde{B},\tilde{E})$ adalah dua graf berarah fuzzy pada *X*, maka komposisi graf berarah fuzzy $(\tilde{A},\tilde{F})$ dan $(\tilde{B},\tilde{E})$ dinotasikan dengan

1. Komposisi tipe I
$$(\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{B},\tilde{E}) = (\tilde{H},\tilde{G})$$
dengan $\tilde{H} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$ dan $\tilde{G} = \tilde{F} \circ \tilde{E}$
2. Komposisi tipe II
$$(\tilde{A},\tilde{F}) \odot (\tilde{B},\tilde{E}) = (\tilde{H},\tilde{G})$$
dengan $\tilde{H} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$ dan $\tilde{G} = \tilde{E} \odot \tilde{F}$

(Kao dan Wu:613)

Teorema 3.3 Misalkan$\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3$adalah tiga graf berarah fuzzy, maka komposisi tipe I dan II pada graf berarah fuzzy bersifat assosiatif.

1. $\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \circ \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \circ \tilde{A}_3$
2. $\tilde{A}_1 \odot (\tilde{A}_2 \odot \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \odot \tilde{A}_2) \odot \tilde{A}_3$

(Kao dan Wu:614)

Bukti:

1. Diketahui $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3$adalah tiga graf berarah fuzzy.Misalkan$\tilde{A}_1 = (\tilde{A},\tilde{F})$, $\tilde{A}_2 = (\tilde{B},\tilde{E})dan\tilde{A}_3 = (\tilde{C},\tilde{D})$
Akan dibuktikan bahwa$\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \circ \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \circ \tilde{A}_3$
$$\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \circ \tilde{A}_3) = (\tilde{A},\tilde{F}) \circ \left((\tilde{B},\tilde{E}) \circ (\tilde{C},\tilde{D})\right)$$
$$= (\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circ \tilde{D})$$
$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{F} \circ (\tilde{E} \circ \tilde{D})\right)$$
Berdasarkan sifat assosiatif pada himpunan fuzzy dan pada komposisi tipe I (definisi 2.17 dan teorema 2.6) maka diperoleh
$$\left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{F} \circ (\tilde{E} \circ \tilde{D})\right) = \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C}, (\tilde{F} \circ \tilde{E}) \circ \tilde{D}\right)$$
$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{F} \circ \tilde{E}) \circ (\tilde{C},\tilde{D})$$
$$= \left((\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{B},\tilde{E})\right) \circ (\tilde{C},\tilde{D})$$
$$= (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \circ \tilde{A}_3$$
Jadi, $\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \circ \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \circ \tilde{A}_3$. ■

Teorema 3.4 Misalkan $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3$adalah tiga graf berarah fuzzy, maka komposisi tipe I dan II pada graf berarah fuzzy bersifat distributif terhadap operasi maksimum $(\vee)$ dan minimum $(\wedge)$.

1. $\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_3)$
2. $\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \wedge \tilde{A}_3) \leq (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \wedge (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_3)$
3. $\tilde{A}_1 \odot (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3) \geq (\tilde{A}_1 \odot \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \odot \tilde{A}_3)$
4. $\tilde{A}_1 \odot (\tilde{A}_2 \wedge \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \odot \tilde{A}_2) \wedge (\tilde{A}_1 \odot \tilde{A}_3)$

(Kao dan Wu:615)

Bukti:

1. Diketahui $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{A}_3$adalah tiga graf berarah fuzzy.Misalkan $\tilde{A}_1 = (\tilde{A},\tilde{F})$, $\tilde{A}_2 = (\tilde{B},\tilde{E})$dan $\tilde{A}_3 = (\tilde{C},\tilde{D})$
Akan dibuktikan bahwa$\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_3)$
$$\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3) = (\tilde{A},\tilde{F}) \circ \left((\tilde{B},\tilde{E}) \vee (\tilde{C},\tilde{D})\right)$$
$$= (\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \vee \tilde{D})$$
$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{F} \circ (\tilde{E} \vee \tilde{D})\right)$$
Berdasarkan sifat distributif pada himpunan fuzzy dan pada komposisi tipe I terhadap operasi maksimum (definisi 2.17 dan teorema 2.7) maka diperoleh
$$\left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{F} \circ (\tilde{E} \vee \tilde{D})\right) = \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{F} \circ \tilde{E}) \vee (\tilde{F} \circ \tilde{D})\right)$$
$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{F} \circ \tilde{E}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \circ \tilde{D})$$
$$= \left((\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{B},\tilde{E})\right) \vee \left((\tilde{A},\tilde{F}) \circ (\tilde{C},\tilde{D})\right)$$
$$= (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_3)$$
Jadi, $\tilde{A}_1 \circ (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3) = (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \circ \tilde{A}_3)$.■

3.4 Graf Berarah Fuzzy yang Lebih Baik

Definisi 3.8 Misalkan *X* himpunan berhingga. Sebuah graf berarah fuzzy $\tilde{D} = (\tilde{A},\tilde{F})$disebut graf berarah fuzzy yang lebih baik jika
$$\mu_{\tilde{F}}(x,y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y), \forall x,y \in X$$
dengan $\tilde{F}$ adalah relasi fuzzy pada $\tilde{A}$.

(Kao dan Wu:616)

Definisi 3.9 Misalkan *X* himpunan berhingga dan $\tilde{D} = (\tilde{A},\tilde{F})$adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik dan misal $0 < \alpha \leq 1$, maka graf berarah terinduksi $\tilde{D}$ didefinisikan sebagai berikut
$$\mathrm{I}(\tilde{D},\alpha) = (V,E)$$
denganV $= \{x \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$

$E = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, \quad \mu_{\tilde{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \alpha\}$
(Kao dan Wu:621)

Definisi 3.10 Misalkan X adalah himpunan berhingga, $V \subset X$ dan $G = (V, E)$ adalah graf berarah. Didefinisikan bahwa graf berarah fuzzy yang kanonikyang berhubungan dengan G dinotasikan dengan $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dengan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \qquad jika\ x \in V$$
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \qquad jika\ x \notin V$$
dan $$\mu_{\tilde{F}}(x, y) = 1 \qquad jika\ (x, y) \in E$$
$$\mu_{\tilde{F}}(x, y) = 0 \qquad jika\ (x, y) \notin E$$

dengan$\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari V.
$\mu_{\tilde{F}}$ adalah fungsi keanggotaan dari E.
(Kao dan Wu:621)

Proposisi 3.1 Jika $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang kanonikmaka $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik .
(Kao dan Wu:621)
Bukti:
Diketahui $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang kanonikdari *X*.
Akan dibuktikan bahwa $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik.
Misal $x, y \in X$
Jika$\mu_{\tilde{F}}(x, y) = 0$ maka$\mu_{\tilde{F}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y)$...................*(i)*
Jika $\mu_{\tilde{F}}(x, y) = 1$ maka $(x, y) \in E$ sehingga $x, y \in V$.
Karena $x, y \in V$ maka $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(y) = 1$
Sehingga
$\mu_{\tilde{F}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y)$.................*(ii)*
Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik.

Proposisi 3.2 Misalkan $V \subset X$ dan $G = (V, E)$ adalah graf berarah, maka $\mathrm{I}(\tilde{G}, 1) = G$
(Kao dan Wu:621)
Bukti:
Diketahui $V \subset X$ dan $G = (V, E)$ adalah graf berarah
Akan dibuktikan $\mathrm{I}(\tilde{G}, 1) = G$
Misalkan $\tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah graf berarah fuzzy yang kanonikyang berhubungan dengan G.
Maka

$$\mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) = 1 \qquad jika\ x \in V$$
$$\mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad jika\ x \notin V$$

dan $$\mu_{\tilde{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1 \qquad jika\ (x, y) \in E$$
$$\mu_{\tilde{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \qquad jika\ (x, y) \notin E$$

Berdasarkan Proposisi 3.1, $\tilde{G}$ adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik. Jika graf berarah terinduksi $\tilde{G}$ adalah $\mathrm{I}(\tilde{G}, 1)$ maka

$$V\left(\mathrm{I}(\tilde{G}, 1)\right) = \{x \mid x \in X, \mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$$
$$= \{x \mid x \in V\}$$
$$= V \text{................(i)}$$
$$E\left(\mathrm{I}(\tilde{G}, 1)\right) = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, \mu_{\tilde{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 1\}$$
$$= \{(x, y) \mid (x, y) \in E\}$$
$$= E \text{................ (i)}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\mathrm{I}(\tilde{G}, 1) = G$. ■

Definisi 3.11 Misalkan $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf berarah dan $V_1, V_2 \subset X$. Misal $\tilde{G}_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{F}_1)$,$\tilde{G}_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{F}_2)$ adalah dua graf berarah fuzzy yang kanonik yang berhubungan dengan G_1dan G_2. Didefinisikan komposisi dari 2 graf berarah G_1dan G_2 yaitu

$$G_1 \circ G_2 = \mathrm{I}\left(\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2, 1\right)$$

(Kao dan Wu:622)

Teorema 3.5 Misalkan $\tilde{G}$dan $\tilde{D}$ adalah dua graf berrah fuzzy yang lebih baik, dan misal $0 < \alpha \leq 1$ maka

$$\mathrm{I}\left(\tilde{D} \circ \tilde{G}, \alpha\right) = \mathrm{I}\left(\tilde{D}, \alpha\right) \circ \mathrm{I}\left(\tilde{G}, \alpha\right)$$

(Kao dan Wu:623)

Bukti:
Diketahui $\tilde{G}$dan $\tilde{D}$ adalah dua graf berrah fuzzy yang lebih baik dari *X*, dan $0 < \alpha \leq 1$.
Akan dibuktikan bahwa $\mathrm{I}\left(\tilde{D} \circ \tilde{G}, \alpha\right) = \mathrm{I}\left(\tilde{D}, \alpha\right) \circ \mathrm{I}\left(\tilde{G}, \alpha\right)$.
Misal $\tilde{D} = (\tilde{A}_1, \tilde{F}_1)$, $\tilde{G} = (\tilde{A}_2, \tilde{F}_2)$, dan$\tilde{D} \circ \tilde{G} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ dimana $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}$adalah himpunan fuzzy pada *X* dan $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}$ adalah relasi fuzzy pada *X*. Berdasarkan definisi 3.7 pada komposisi tipe I, maka diperoleh
$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2$ dan $\tilde{F} = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2$
Misalkan $\mathrm{I}\left(\tilde{D} \circ \tilde{G}, \alpha\right) = G_1$, $\mathrm{I}\left(\tilde{D}, \alpha\right) = G_2$, $\mathrm{I}\left(\tilde{G}, \alpha\right) = G_3$
Berdasarkan proposisi 3.2, maka diperoleh bahwa $G_2 = \mathrm{I}\left(\tilde{G}_2, 1\right)$, $G_3 = \mathrm{I}\left(\tilde{G}_3, 1\right)$
Berdasarkan definisi 3.11, maka diperoleh bahwa $G_2 \circ G_3 = \mathrm{I}\left(\tilde{G}_2 \circ \tilde{G}_3, 1\right)$, dimana $\tilde{G}_2$dan $\tilde{G}_3$ adalah graf berarah fuzzy yang kanonik dari X yang berhubungan dengan G_2 dan G_3.
Misalkan $\tilde{G}_2 = (\tilde{B}_1, \tilde{E}_1)$, $\tilde{G}_3 = (\tilde{B}_2, \tilde{E}_2)$, dan $\tilde{G}_2 \circ \tilde{G}_3 = (\tilde{B}, \tilde{E})$

Berdasarkan definisi 3.7 pada komposisi tipe I, maka diperoleh

$\tilde{B} = \tilde{B}_1 \vee \tilde{B}_2$ dan $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \circ \tilde{E}_2$

Untuk membuktikan $G_1 = G_2 \circ G_3$ maka akan ditunjukkan bahwa

I. $V(G_1) = V(G_2 \circ G_3)$

II. $E(G_1) = E(G_2 \circ G_3)$

I. $V(G_1) = V\left(\mathrm{I}\left(\tilde{D} \circ \tilde{G}, \alpha\right)\right)$

$= \{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$

$= \left\{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{A}_1}(\boldsymbol{x}) \vee \mu_{\tilde{A}_2}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\right\}$

$= \left\{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{A}_1}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha \text{ dan } \mu_{\tilde{A}_2}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\right\}$

$= \{x | x \in X,\ x \in V(G_2) \text{dan } x \in V(G_3)\}$

$= \left\{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{B}_1}(\boldsymbol{x}) \geq 1 \text{ dan } \mu_{\tilde{B}_2}(\boldsymbol{x}) \geq 1\right\}$

$= \left\{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{B}_1}(\boldsymbol{x}) \vee \mu_{\tilde{B}_2}(\boldsymbol{x}) \geq 1\right\}$

$= \{x | x \in X,\ \mu_{\tilde{B}}(\boldsymbol{x}) \geq 1\}$

$= V\left(\mathrm{I}\left(\tilde{G}_2 \circ \tilde{G}_3, 1\right)\right)$

$= V(G_2 \circ G_3)$ ■

II. $E(G_1) = E\left(\mathrm{I}\left(\tilde{D} \circ \tilde{G}, \alpha\right)\right)$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX,\quad \mu_{\tilde{F}}(x,z) \geq \alpha\}$

$= \left\{(x,z) | (x,z) \in XxX,\ \max_{y \in X}\{\mu_{\tilde{F}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{F}_2}(y,z)\} \geq \alpha\right\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX,\ \exists y_o \in X \ni \mu_{\tilde{F}_1}(x,y_o) \wedge \mu_{\tilde{F}_2}(y_o,z) \geq \alpha\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX, \exists y_o \in X \ni \mu_{\tilde{F}_1}(x,y_o) \geq \alpha \text{ dan} \mu_{\tilde{F}_2}(y_o,z) \geq \alpha\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX,\ \exists y_o \in X \ni (x,y_o) \in E(G_2) \text{dan } (y_o,z) \in E(G_3)\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX, \exists y_o \in X \ni \mu_{\tilde{E}_1}(x,y_o) \geq 1 \text{ dan} \mu_{\tilde{E}_2}(y_o,z) \geq 1\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX,\ \exists y_o \in X \ni \mu_{\tilde{E}_1}(x,y_o) \wedge \mu_{\tilde{E}_2}(y_o,z) \geq 1\}$

$= \left\{(x,z) | (x,z) \in XxX,\ \max_{y \in X}\left\{\mu_{\tilde{E}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{E}}(y,z)\right\} \geq 1\right\}$

$= \{(x,z) | (x,z) \in XxX,\quad \mu_{\tilde{E}}(x,z) \geq 1\}$

$= E\left(\mathrm{I}\left(\tilde{G}_2 \circ \tilde{G}_3, 1\right)\right)$

$= E(G_2 \circ G_3)$ ■

SIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Beberapa sifat aljabar pada himpunan fuzzy juga berlaku pada graf berarah fuzzy *(teorema 3.1).*
2. Komposisi tipe I dan tipe II pada graf berarah fuzzy bersifat assosiatif.
3. Komposisi tipe I dan tipe II pada graf berarah fuzzy bersifat distributif terhadap operasi maksimum (⋁) dan minimum (⋀).
4. Graf berarah fuzzy yang kanonik adalah graf berarah fuzzy yang lebih baik.
5. Graf berarah terinduksi dari komposisi dua graf berarah fuzzy yang lebih baik sama dengan komposisi dari dua graf berarah terinduksi dari masing-masing graf berarah fuzzy yang lebih baik tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chen, In Chu dan Wu, Sun yen. 1986. *Fuzzy Digraph*: institute of mathematics college of sciences. http://140.122.100.145/ntnuj/j30/j30-14.pdf di akses 08 oktober 2012

[2] Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun yen. *The Compositions of Fuzzy Digraphs*: institute of Mathematics college of sciences. http://140.122.100.145/ntnuj/j30/j30.asp?appl=j3020.pdf. di akses 12 oktober 2012

[3] Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University press.

[4] Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1996. *Graphs and Digraphs third Edition*: a Division of Wadsworth, Inc.

[5] Klir, G.J., and Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall.

[6] Brown, J.G. 1971. *A note fuzzy sets*. Information and Control 18, 32-39. http://ac.els-cdn.com/S0019995871902889/1-s2.0-S0019995871902889-main.pdf?_tid=bd4610aa-24f2-11e2-8c0a-00000aab0f26&acdnat=1351863755_11cfdcf1ad02eb1cde25a9adb9b9b89f. di akses 20 oktober 2012

[7] Zadeh, L.A. 1965. *Fuzzy Sets*. Information and Control, vol.8, 338-353. Academics Press inc.